MIRON NICOLESCO

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS POLYHARMONIQUES

RECHERCHES

SUR LES

FONCTIONS POLYHARMONIQUES

PAR M. MIRON NICOLESCO.

Introduction.

J'ai consacré, depuis 1930 (1), une série de travaux à l'étude des fonctions harmoniques d'ordre supérieur ou fonctions *polyharmoniques*, suivant la dénomination des géomètres italiens (2). Je reviens maintenant sur cette étude pour la compléter en quelques points essentiels.

Le présent Mémoire est divisé en deux Parties. La première contient le résultat de réflexions provoquées par la lecture d'un beau Mémoire de E. Almansi, datant de 1899 (3). Ce Mémoire contient,

---

(1) MIRON NICOLESCO, *Extension du théorème de Gauss aux fonctions harmoniques d'ordre p* (*Comptes rendus*, t. 191, 1930, p. 515).

(2) *Voir* en particulier, MIRON NICOLESCO, *a*, *Sur les fonctions harmoniques d'ordre p* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 59, 1931, p. 75-87), et *b*, *Sur les fonctions de n variables, harmoniques d'ordre p* (*Ibid.*, t. 60, 1932, p. 129-151).

(3) E. ALMANSI, *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$ (*Annali di Matematica*, 3e série, t. II, 1899, p. 1-51).

entre autres, le développement d'une fonction harmonique d'ordre p, régulière dans un certain domaine, suivant des fonctions harmoniques ordinaires (d'ordre 1). Cette première Partie est divisée en trois Sections. Dans la première, nous rappelons le résultat de E. Almansi, avec quelques précisions dans la démonstration et une légère extension consistant dans la transposition de cette démonstration à l'espace à n dimensions. Dans la seconde section, nous montrons que ce développement est *unique*. D'après cela, se donner une fonction harmonique d'ordre p, régulière dans un certain domaine, équivaut à se donner p fonctions harmoniques d'ordre 1, régulières dans le même domaine, et cela explique, mieux encore que l'ordre de l'équation différentielle, pourquoi, pour déterminer une fonction harmonique d'ordre p dans un domaine, il faut se donner p fonctions sur la frontière de ce domaine. Dans la troisième section, nous étendons aux fonctions harmoniques d'ordre p les résultats de Harnack concernant les fonctions harmoniques d'ordre un.

La seconde Partie est consacrée à l'étude des fonctions harmoniques de divers ordres dans un demi-espace. Une fonction harmonique (d'ordre 1), bornée dans tout l'espace, est une constante : c'est le théorème bien connu de Liouville. Mais que peut-on dire d'une fonction harmonique bornée dans un demi-espace ? Question à laquelle nous essayons de répondre, en partant d'un théorème de M. J. Favard(4), après avoir établi quelques formules préliminaires et leurs applications immédiates aux familles de fonctions harmoniques également bornées dans un demi-espace. Nous étendons enfin ces résultats aux fonctions polyharmoniques.

Une partie des résultats de ce Mémoire figure dans une communication faite au VIII[e] Congrès de l'Association roumaine pour l'avancement des Sciences (5), et dans une autre communication faite à la Société roumaine des Sciences (6).

---

(4) J. FAVARD, *Sur les fonctions harmoniques presque périodiques* (*Thèse*, Paris, 1927, et *Journ. de Math.*, même année).

(5) Bucarest, 29 avril-2 mai 1934.

(6) Séance du 15 octobre 1934.

PREMIÈRE PARTIE.

FONCTIONS POLYHARMONIQUES DANS UN DOMAINE BORNÉ.

I. — Le théorème d'Almansi.

1. Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction d'un point M de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions. Nous poserons

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta^s = \Delta(\Delta^{s-1} u) \qquad (s = 2, 3, \ldots).$$

On appellera fonction *harmonique d'ordre p*, toute intégrale de l'équation $\Delta^p u = 0$. Lorsque l'ordre de la fonction n'interviendra pas dans l'énoncé, la fonction sera encore appelée *polyharmonique*. Une telle fonction sera dite *régulière* dans le domaine où elle est définie si elle y est continue ainsi que ses dérivées partielles des $2p$ premiers ordres (7).

2. Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction quelconque définie dans un certain domaine D de l'espace à n dimensions où elle est assujettie à être continue et à posséder des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre, déterminé par les calculs qui vont suivre. Soit encore $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un point quelconque fixe intérieur au domaine D. Je poserai

$$r^2 = \overline{MM_0}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2.$$

Nous nous proposons de calculer les laplaciens successifs du produit $r^2 u$.

---

(7) On peut, d'après un résultat, dû à M. Wilkosz (*Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 435), exiger seulement que les dérivées partielles d'ordre $2p$ existent et soient *finies* dans le domaine considéré.

On a, tout d'abord,

$$\Delta(r^2 u) = r^2 \Delta u + 4\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i} + 2nu.$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i} = r\frac{\partial u}{\partial r},$$

en désignant par $\frac{\partial u}{\partial r}$ la dérivée de u suivant la direction $\overline{MM_0}$. Donc,

$$\Delta(r^2 u) = r^2 \Delta u + 4r\frac{\partial u}{\partial r} + 2nu. \tag{1}$$

Je dis que l'on a, d'une manière générale,

$$\Delta^i(r^2 u) = r^2 \Delta^i u + A_i r\frac{\partial \Delta^{i-1} u}{\partial r} + B_i \Delta^{i-1} u. \tag{2}$$

Supposons, en effet, cette relation vraie pour une certaine valeur de i, nous allons montrer qu'elle est vraie pour la valeur $i+1$.

La formule (1), appliquée aux produits $r^2 \Delta^i u$ et $r\frac{\partial \Delta^{i-1} u}{\partial r}$ donnera

$$\Delta(r^2 \Delta^i u) = r^2 \Delta^{i+1} u + 4r\frac{\partial \Delta^i u}{\partial r} + 2n\Delta^i u,$$

$$\Delta\left(r\frac{\partial \Delta^{i-1} u}{\partial r}\right) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)\frac{\partial \Delta^{i-1} u}{\partial r}\right) = \Delta^i u + r\frac{\partial \Delta^i u}{\partial r};$$

donc, en prenant le laplacien des deux membres de la relation (2), on obtiendra

$$\Delta^{i+1}(r^2 u) = r^2 \Delta^{i+1} u + A_{i+1} r\frac{\partial \Delta^i u}{\partial r} + B_{i+1}\Delta^i u$$

avec

$$A_{i+1} = A_i + 4, \qquad B_{i+1} = B_i + A_i + 2n. \tag{3}$$

Or, la formule (2) est vraie pour $i = 1$; donc elle est vraie pour toute valeur entière de i.

Les relations de récurrence (3) permettent de calculer A_i et B_i en fonction de i et de n, elles donnent de suite

$$A_i = 4i, \qquad B_i = 2i(n + 2i - 2). \tag{4}$$

Il résulte de la formule (2) que le produit par r^2 d'une fonction $u'_{p-1}(M)$, harmonique d'ordre $p-1$, est une fonction harmonique d'ordre p. Il en sera de même de l'expression suivante :

$$r^2 u'_{p-1}(M) + u''_{p-1}(M),$$

où $u''_{p-1}(M)$ est une fonction harmonique arbitraire d'ordre $p-1$.

3. E. Almansi, dans son Mémoire cité, s'est posé le problème inverse suivant, qu'il a résolu par l'affirmative : Une fonction $u_p(M)$, harmonique d'ordre p, étant donnée, peut-on déterminer deux fonctions harmoniques d'ordre $p-1$, $u'_{p-1}(M)$ et $u''_{p-1}(M)$, telles que l'on ait identiquement

$$u_p(M) = r^2 u'_{p-1}(M) + u''_{p-1}(M) ?$$

Le problème revient à trouver une fonction harmonique d'ordre $p-1$, soit $u'_{p-1}(M)$, telle que l'on ait

$$\Delta^{p-1}(u_p - r^2 u'_{p-1}) = 0.$$

Or, si l'on applique l'identité (2), on trouve

$$\Delta^{p-1} u_p = A_{p-1} r \frac{\partial \Delta^{p-2} u'_{p-1}}{\partial r} + B_{p-1} \Delta^{p-2} u'_{p-1}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en $\Delta^{p-2} u'_{p-1}$, dont une solution immédiate est, en intégrant le long du rayon $M_0 M$,

$$(5) \quad \Delta^{p-1} u'_{p-1}(M) = \frac{1}{A_{p-1} r^{k_{p-1}}} \int_0^r \rho^{k_{p-1}-1} \Delta^{p-1} u_p(m)\, d\rho \qquad \left(k_{p-1} = \frac{B_{p-1}}{A_{p-1}}\right),$$

m étant le point du rayon $M_0 M$, à distance ρ de M_0. Vérifions que c'est une fonction harmonique (d'ordre 1), régulière au point M_0 (8). A cet effet, calculons la dérivée seconde de cette fonction suivant une direction quelconque, issue du point M. Soit $M' \neq M$. On aura, l'intégration étant effectuée le long du rayon $M_0 M'$,

$$\Delta^{p-2} u'_{p-1}(M') = \frac{1}{A_{p-1} r^{k_{p-1}}} \int_0^{r'} \sigma^{k_{p-1}-1} \Delta^{p-1} u_p(m')\, d\sigma$$

(8) Dans son Mémoire cité, E. Almansi a omis de faire cette vérification. M. Paul Montel a bien voulu m'indiquer la démonstration du texte.

avec $r' = M_0M'$, m' étant le point du rayon MM', à distance σ du point M_0. En posant

$$\sigma = \frac{r'}{r}\rho,$$

on obtient

$$\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M') = \frac{1}{A_{p-1}r^{k_{p-1}}}\int_0^{r'} \rho^{k_{p-1}-1}\,\Delta^{p-1}u_p(m')\,d\rho.$$

On en déduit

$$\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M') - \Delta^{p-2}u'_{p-1}(M) = \frac{1}{A_{p-1}r^{k_{p-1}}}\int_0^{r'} \rho^{k_{p-1}-1}[\Delta^{p-1}u_p(m') - \Delta^{p-1}u_p(m)]\,d\rho.$$

Faisons tendre le point M' vers M suivant une direction quelconque. En divisant les deux membres par

$$MM' = mm'\frac{r}{\rho}$$

et passant à la limite, on obtiendra

$$\frac{d\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M)}{d\nu} = \frac{1}{A_{p-1}r^{k_{p-1}-1}}\int_0^{r} \rho^{k_{p-1}-2}\frac{d\Delta^{p-1}u_p(m)}{d\nu}\,d\rho \tag{6}$$

et, par un calcul analogue,

$$\frac{d^2\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M)}{d\nu^2} = \frac{1}{A_{p-1}r^{k_{p-1}-2}}\int_0^{r} \rho^{k_{p-1}-3}\frac{d^2\Delta^{p-1}u_p(m)}{d\nu^2}\,d\rho. \tag{7}$$

Par conséquent,

$$\Delta[\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M)] = \frac{1}{A_{p-1}r^{k_{p-1}-2}}\int_0^{r} \rho^{k_{p-1}-3}\,\Delta[\Delta^{p-1}u_p(m)]\,d\rho = 0,$$

puisque la fonction $u_p(M)$ est, par hypothèse, harmonique d'ordre p.

Le calcul précédent suppose $M \neq M_0$. Mais, si l'on fait tendre M vers M_0, on obtient des formules (5), (6), (7)

$$\lim_{M \to M_0} \Delta^{p-2}u'_{p-1}(M) = \frac{1}{B_{p-1}}\Delta^{p-1}u_p(M_0),$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{d\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M)}{d\nu} = \frac{1}{B_{p-1}-A_{p-1}}\frac{d\Delta^{p-1}u_p(M_0)}{d\nu_2},$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{d^2\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M)}{d\nu^2} = \frac{1}{B_{p-1}-2A_{p-1}}\frac{d^2\Delta^{p-1}u_p(M_0)}{d\nu^2};$$

la fonction $\Delta^{p-2}u'_{p-1}(M)$ est donc régulière et harmonique au point M_0.

La formule (5) constitue une équation aux dérivées partielles en $u'_{p-1}(M)$, dont l'intégration permet de résoudre la question d'Almansi.

4. De son premier résultat, Almansi a déduit un second : *On peut trouver p fonctions harmoniques d'ordre* 1 *et régulières*

$$u'_1(M),\quad u''_1(M),\quad \ldots,\quad u'^{(p)}_1(M),\quad \ldots,$$

telles que l'on ait identiquement

$$(8)\qquad u_p(M) = r^{2p-2}u'_1(M) + r^{2p-4}u''_1(M) + \ldots + r^2 u'^{(p-1)}_1(M) + u'^{(p)}_1(M).$$

Cette formule, fondamentale pour la suite, au même titre que la formule de Taylor pour les polynomes, sera appelée *formule d'Almansi*.

Remarquons que les conclusions de ce paragraphe, et en particulier la formule d'Almansi, sont valables, non pas dans tout le domaine D, mais dans le plus grand domaine étoilé D_0 centré en M_0 et contenu dans D.

II. — Unicité du développement d'Almansi.

5. La fonction $u_p(M)$, harmonique d'ordre p et régulière, et le point M_0 étant donnés, les fonctions

$$u'_1(M),\quad u''_1(M),\quad \ldots,\quad u'^{(p)}_1(M)$$

harmoniques, déterminées de façon que l'identité (8) ait lieu, sont-elles uniques ?

Supposons que l'on puisse écrire l'identité (8) avec un autre système de p fonctions harmoniques. On en déduirait, par soustraction,

$$(9)\qquad r^{2p-2}\varphi'_1 + r^{2p-4}\varphi''_1 + \ldots + r^2\varphi'^{(p-1)}_1 + \varphi'^{(p)}_1 \equiv 0,$$

$\varphi'_1, \varphi''_1, \ldots, \varphi'^{(p)}_1$ étant des fonctions harmoniques régulières dans D_0.

Posons

$$(9')\qquad r^{2p-4}\varphi'_1 + r^{2p-6}\varphi''_1 + \ldots + r^2\varphi'^{(p-2)}_1 + \varphi'^{(p-1)}_1 = W_{p-1}.$$

L'identité précédente devient

$$r^2 W_{p-1} + \varphi_1^{(p)} \equiv 0 ;$$

W_{p-1} étant une fonction harmonique d'ordre $p-1$. Appliquons-lui l'opérateur Δ^{p-1}. On obtiendra

$$A_{p-1} r \frac{\partial \Delta^{p-2} W_{p-1}}{\partial r} + B_{p-1} \Delta^{p-2} W_{p-1} = 0,$$

d'où

$$\Delta^{p-2} W_{p-1} = \frac{C}{r^{k_{p-1}}} \qquad \left(k_{p-1} = \frac{B_{p-1}}{A_{p-1}} = \frac{n}{2} + p - 2 \right),$$

où C ne dépend pas de r. Mais il dépend des autres paramètres fixant la position du point M par rapport au point M_0. C'est donc une fonction du point $\mathfrak{M}$ où la droite $\overline{M_0 M}$ perce l'hypersphère unitaire centrée en M_0. Il faudra donc déterminer cette fonction de manière que la fonction suivante

$$\varphi = \frac{C(\mathfrak{M})}{r^{k_{p-1}}}$$

soit harmonique. Or, si l'on désigne par δ le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami sur l'hypersphère unitaire, on a la formule connue (9)

$$\Delta U = \frac{\delta U}{r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Appliquons-la à notre fonction φ. On obtiendra l'équation

$$\delta C(\mathfrak{M}) + k_{p-1}(k_{p-1} - n + 2) C(\mathfrak{M}) = 0, \tag{10}$$

qui sert à déterminer la fonction $C(\mathfrak{M})$. La conclusion est donc qu'*il existe une infinité de fonctions harmoniques d'ordre* 1, *vérifiant l'identité d'Almansi.*

Mais, si l'on exige que ces fonctions soient *régulières* au point M_0, il faut évidemment que W_{p-1} le soit; donc, finalement, il faut que $\Delta^{p-2} W_{p-1}$ soit régulière au point M_0. Or, cela est impossible, tant que $C \not\equiv 0$. Il faut donc que la fonction C soit nulle identiquement; d'où

$$\Delta^{p-2} W_{p-1} = 0,$$

(9) *Cf.*, par exemple, G. Bouligand, *Fonctions harmoniques, Principes de Picard et de Dirichlet* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XI, 1926, p. 23).

c'est-à-dire que la fonction W_{p-1} est une fonction harmonique d'ordre $p-2$. Appliquons alors à l'identité (9') l'opérateur Δ^{p-2}. On trouvera

$$A_{p-2} r \frac{\partial \Delta^{p-3} W_{p-1}}{\partial r} + B_{p-2} \Delta^{p-3} W_{p-1} = 0;$$

d'où

$$\Delta^{p-3} W_{p-1} = \frac{C'}{r^{k_{p-2}}} \qquad \left(k_{p-2} = \frac{B_{p-2}}{A_{p-2}} \right),$$

C' étant déterminée par une équation analogue à (10). Comme W_{p-1} est régulière en M_0, on aura $C' \equiv 0$, et la fonction W_{p-1} est harmonique d'ordre $p-3$, et ainsi de suite. On arrivera ainsi, de proche en proche, à réduire l'ordre de l'harmonicité de W_{p-1} à l'unité. Alors, en appliquant finalement l'opérateur Δ à l'identité (9'), on trouvera

$$4r \frac{\partial W_{p-1}}{\partial r} + 2n W_{p-1} = 0;$$

d'où

$$W_{p-1} = \frac{C^{(p-2)}}{r^{\frac{n}{2}}},$$

et finalement $W_{p-1} \equiv 0$. On aura donc

$$r^{2p-4} \varphi_1' + r^{2p-6} \varphi_1'' + \ldots + r^2 \varphi_1^{(p-2)} + \varphi_1^{(p-1)} \equiv 0;$$

d'où, en comparant avec (9),

$$\varphi_1^{(p)}(M) \equiv 0$$

et l'identité (9) se réduit à l'identité précédente. En appliquant à cette nouvelle identité le même raisonnement que tout à l'heure, on trouvera

$$\varphi_1^{(p-1)}(M) \equiv 0$$

et ainsi de suite. Finalement, toutes les fonctions $\varphi_1^{(i)}(M)$ devront être nulles identiquement; d'où le

THÉORÈME I. — *La fonction $u_p(M)$ harmonique d'ordre p, régulière dans D_0, étant donnée, il existe un système unique*

$$u_1'(M), \quad u_1''(M), \quad \ldots, \quad u_1^{(p)}(M)$$

de p fonctions harmoniques d'ordre 1, *régulières dans D_0, telles que*

l'on ait

$$u_p(M) = r^{2p-2} u_1'(M) + r^{2p-4} u_1''(M) + \ldots + r^2 u_1^{(p-1)}(M) + u_1^{(p)}(M)$$

identiquement dans D_0.

6. On pourrait affirmer, d'après cela, que la donnée d'une fonction harmonique d'ordre p, régulière dans D_0, équivaut à la donnée, dans un certain ordre, de p fonctions harmoniques simples, régulières dans le même domaine, tout comme la donnée d'un domaine d'un polynome de degré $p-1$ équivaut à la donnée de p *constantes*. Cette comparaison montre quel sens il faudra donner à cette notion d'*équivalence*. L'étude des fonctions polyharmoniques ne se réduit pas plus à celle des fonctions harmoniques que l'étude des polynomes ne se réduit à celle des constantes.

Une autre remarque est nécessaire. Le développement d'Almansi n'est valable que dans un domaine étoilé de centre M_0. Les théorèmes dérivant de l'application de ce développement ne seront donc valables que dans de tels domaines, à moins qu'on ne les démontre ultérieurement, ou qu'on ne les prolonge dans tout le domaine considéré par d'autres voies.

III. — Extension des théorèmes de Harnack.

7. **Rappel de quelques résultats.** — Nous nous sommes déjà occupé des suites de fonctions harmoniques d'ordre p ([10]), lorsque nous avons étendu à ces suites les théorèmes de M. Paul Montel concernant les fonctions harmoniques d'ordre 1. Dans ce paragraphe, nous compléterons l'étude de ces suites ; en particulier, nous étendrons aux suites de fonctions harmoniques d'ordre p les théorèmes classiques de Harnack concernant les suites de fonctions harmoniques d'ordre 1.

Rappelons quelques notions et résultats antérieurement établis. Soit $u(M)$ une fonction sommable quelconque du point M de l'espace à n dimensions, définie dans le domaine borné D. Je désigne, respectivement, par $\mu_0[u(M'); M; \rho]$, $\mu_1[u(M'); M; \rho]$ les moyennes périphé-

([10]) *Voir* MIRON NICOLESCO, *loc. cit.* ([2]) (Mémoire *b*).

rique et spatiale de u relativement à l'hypersphère de centre M et de rayon ρ, Ces deux moyennes sont liées par la relation intégrale suivante :

$$\mu_1[u(M'); M; r] = \frac{n}{r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\mu_0[u(M'); M; \rho]\,d\rho.$$

J'introduis la suite suivante de moyennes hypersphériques

$$\mu_0, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_s, \quad \ldots,$$

définie par la relation de récurrence

$$(11)\quad \mu_s[u(M'); M; r] = \frac{n}{r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\mu_{s-1}[u(M'); M; \rho]\,d\rho \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

et je pose encore

$$(12)\quad V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{n}{n+2} & \ldots & \frac{n}{n+2p-2} \\ \cdot & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & \frac{n^{p-1}}{(n+2)^{p-1}} & \ldots & \frac{n^{p-1}}{(n+2p-2)^{p-1}} \end{vmatrix},$$

$$(13)\quad V\left[\mu_0(u; M; r), \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right] = \begin{vmatrix} \mu_0\ (u; M; r) & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1\ (u; M; r) & \frac{n}{n+2} & \ldots & \frac{n}{n+2p-2} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots\cdots \\ \mu_{p-1}(u; M; r) & \frac{n^{p-1}}{(n+2)^{p-1}} & \ldots & \frac{n^{p-1}}{(n+2p-2)^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante, généralisation des théorèmes de Gauss et de E.-E. Levi :

A. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction bornée* $u(M)$, *supposée sommable dans* D, *soit harmonique d'ordre* p *dans ce domaine, est que l'on ait, dans* D_ρ (11), *quel*

(11) Nous désignons, comme d'habitude, par D_ρ le lieu des centres des hypersphères de rayon ρ, contenues dans D.

que soit ρ,

$$(14)\qquad u(M)=\frac{V\left[\mu(u;M;r),\frac{n}{n+2},\ldots,\frac{n}{n+2p-2}\right]}{V\left(1,\frac{n}{n+2},\ldots,\frac{n}{n+2p-2}\right)}$$

pour $r<\rho$ ([12]).

8. Une autre notion nous est encore nécessaire. D'après M. F. Riesz, une fonction $u(M)$ est *sousharmonique* dans un domaine D, si l'on a, pour tout point M de ce domaine,

$$u(M)\leqq\mu_0[u(M');M;r],$$

r étant suffisamment petit ([13]). Si l'inégalité de sens contraire est vérifiée, la fonction sera *surharmonique* dans D.

Si la fonction $u(M)$ possède un laplacien $\Delta u(M)$, la condition de sousharmonicité peut être exprimée par l'inégalité suivante :

$$\Delta u(M)\geqq 0,$$

et la surharmonicité par l'inégalité de sens contraire ([14]).

Nous avons généralisé cette notion de la manière suivante. Nous appelons fonction *sousharmonique d'ordre p*, dans un domaine D, toute fonction $u(M)$ pour laquelle on a, en tout point de D_ρ,

$$(15)\qquad u(M)\leqq\frac{V\left[\mu(u;M;r),\frac{n}{n+2},\ldots,\frac{n}{n+2p-2}\right]}{V\left(1,\frac{n}{n+2},\ldots,\frac{n}{n+2p-2}\right)},$$

pour $r\leqq\rho$, ρ étant suffisamment petit.

Si l'inégalité contraire est vérifiée, la fonction sera *surharmonique*

([12]) Voir *loc. cit.* ([2]), Mémoire *b*), ou encore : MIRON NICOLESCO, *Sur une propriété caractéristique des fonctions harmoniques d'ordre p et sur l'existence des laplaciens de divers ordres* (*Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*, vol. VII, 1933, p. 235-243).

([13]) F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel* (premier Mémoire, *Acta mathematica*, t. 48, 1926, p. 329-343).

([14]) F. RIESZ, *loc. cit.* ([19]), et PAUL MONTEL, *Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 9e série, t. VII, 1928, p. 29-60).

d'ordre p ([15]). Avec cette terminologie, les fonctions sousharmoniques ou surharmoniques de M. Riesz seront des fonctions sousharmoniques ou surharmoniques *d'ordre* 1.

Pour les fonctions sousharmoniques d'ordre p on a la proposition suivante :

B. *Si la fonction* $u(M)$, *sousharmonique d'ordre p dans le domaine* D, *possède des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre* $2p$ *inclusivement, on a dans ce domaine*

$$(-1)^p \Delta^p u \geqq 0. \tag{16}$$

Réciproquement, si la relation précédente est vérifiée dans D, *la fonction* $u(M)$ *est sousharmonique d'ordre p dans ce domaine* ([2]).

La relation

$$(-1)^p \Delta^p u \geq 0 \tag{16'}$$

caractérise les fonctions *surhamoniques d'ordre p*.

9. **Extension du premier théorème de Harnack.** — Donnons, tout d'abord, deux propositions préliminaires.

THÉORÈME II. — *Soit*

$$u^1(M) + u^2(M) + \ldots + u^s(M) + \ldots$$

une série, uniformément convergente sur la frontière F *d'un domaine de Dirichlet* D, *de fonctions y possédant un laplacien à dérivées partielles du premier ordre continues. Si la série des laplaciens*

$$\Delta u^1(M) + \Delta u^2(M) + \ldots + \Delta u^s(M) + \ldots$$

converge uniformément dans D *vers une fonction à dérivées partielles du premier ordre continues, alors la série donnée converge uniformément dans* D *et le laplacien de sa somme est égal à la somme des laplaciens des termes.*

([15]) MIRON NICOLESCO, *Sur les fonctions harmoniques et sousharmoniques d'ordre p* (*Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 1152); ou encore, *loc. cit.*, ([2]) (Mémoire *b*).

On a, d'après l'hypothèse,

$$u^s(M) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_D G(M;P)\,\Delta u^s(P)\,d\mathfrak{S}_P + h^s(M),$$

$h^s(M)$ étant la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs que $u^s(M)$ sur la frontière de D. Il résulte de cette formule que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} h^s(M)$$

converge uniformément sur F, donc elle converge uniformément dans D. La même formule montre alors que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^s(M),$$

converge uniformément dans D.

Écrivons la formule précédente pour $s = 1, 2, \ldots$, et ajoutons. Il vient

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^s(M) = \sum_{s=1}^{\mu} u^s(M) + R^\mu(M)$$

$$= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_D G(M;P)\left(\sum_{s=1}^{\mu}\Delta u^s(P)\right)d\mathfrak{S}_P + \sum_{s=1}^{\mu} h^s(M) + R^\mu(M),$$

où

$$R^\mu(M) = \sum_{s=\mu+1}^{\infty} u^s(M).$$

Or, d'après ce que nous venons de voir, on peut prendre μ tel que l'on ait, uniformément dans D,

$$|R^\mu(M)| < \varepsilon,$$

ε étant donné, arbitrairement petit. Cela montre que l'on a, en désignant par $u(M)$ la somme de la série donnée,

$$(17)\quad u(M) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_D G(M;P)\left(\sum_{s=1}^{\infty}\Delta u^s(P)\right)d\mathfrak{S}_P + \sum_{s=1}^{\infty} h^s(M);$$

donc

$$\Delta u(M) = \sum_{s=1}^{\infty} \Delta u^s(M). \tag{18}$$

Il faut remarquer que l'hypothèse que $\sum_{s=1}^{\infty} \Delta u^s(M)$ possède des dérivées partielles continues du premier ordre est essentielle, dans l'état actuel des connaissances sur l'équation de Laplace, pour pouvoir déduire de la formule (17) la formule (18).

THÉORÈME III. — *La somme d'une série de fonctions harmoniques d'ordre p, uniformément convergente dans un domaine* D, *est une fonction harmonique d'ordre p* ([16]).

Soient

$$u^1(M) + u^2(M) + \ldots + u^s(M) + \ldots$$

une série de fonctions harmoniques d'ordre p, uniformément convergente dans un domaine borné D de l'espace à n dimensions, et U(M) sa somme. Il est clair, tout d'abord, que la série des *moyennes hypersphériques d'ordre i* sera aussi uniformément convergente dans le même domaine et représentera la moyenne d'ordre i de U(M). On pourra, par conséquent, écrire

$$\mu_i[U(M'); M: r] = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_i[u^s(M'); M; r] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Remarquons, en second lieu, que la relation (14), caractérisant les fonctions harmoniques d'ordre p, étant linéaire par rapport aux moyennes de divers ordres, peut s'écrire

$$u(M) = C_0\mu_0 + C_1\mu_1 + \ldots + C_{p-1}\mu_{p-1}, \tag{20}$$

les C_i étant des coefficients numériques indépendants de u, mais dépendant de n et de p.

Ces remarques faites, écrivons la relation (19) pour $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, multiplions respectivement par $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ et ajoutons.

([16]) Dans les Mémoires cités ([2]), nous avons *admis* cette proposition qui n'est nullement évidente.

Puisque les fonctions $u^s(M)$ sont harmoniques d'ordre p, et qu'elles vérifient toutes la relation (20), on obtiendra

$$C_0\mu_0(U; M; r) + C_1\mu_1(U; M; r) + \ldots + C_{p-1}\mu_{p-1}(U; M; r) = \sum_{s=1}^{\infty} u^s(M) = U(M);$$

donc, en vertu du théorème A, la fonction U(M) est harmonique d'ordre p.

La démonstration est encore valable pour $p = 1$, la formule (20) se réduit alors à la formule de moyenne de Gauss et l'on obtient de cette manière une démonstration très simple d'une proposition connue.

10. Nous pouvons maintenant donner l'extension du théorème suivant de Harnack :

Si une série de fonctions harmoniques converge uniformément sur le contour d'un domaine D, *elle converge uniformément à l'intérieur, vers une fonction harmonique.*

En voici l'énoncé :

THÉORÈME IV. — *Si une série de fonctions harmoniques d'ordre p converge uniformément sur le contour d'un domaine* D *de Dirichlet borné, et s'il en est de même des séries des laplaciens successifs, alors ces séries convergent uniformément dans* D *vers une fonction harmonique d'ordre p et ses laplaciens successifs.*

Supposons le théorème vrai pour les fonctions harmoniques d'ordres 1, 2, ... $p-1$, nous allons montrer qu'il est vrai pour les fonctions harmoniques d'ordre p.

En effet, soit

$$u^1(M) + u^2(M) + \ldots + u^s(M) + \ldots$$

la série donnée, convergeant uniformément sur la frontière F de D et telle qu'en outre les séries suivantes

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Delta u^s(M), \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \Delta^2 u^s(M), \quad \ldots, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \Delta^{p-1} u^s(M)$$

convergent uniformément sur F. Les termes de ces séries sont des fonctions harmoniques d'ordres $\leq p-1$, le théorème énoncé leur est donc applicable. Il en résulte, en particulier, que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Delta u^s(\mathrm{M})$$

converge uniformément dans D vers une fonction harmonique d'ordre $p-1$; donc, d'après le théorème II, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^s(\mathrm{M})$$

convergera uniformément dans D, vers une fonction harmonique d'ordre p.

11. **Extension du second théorème de Harnack.** — On doit à Harnack un autre théorème important, concernant les fonctions harmoniques et positives :

Si une série de fonctions harmoniques et positives dans un domaine D *converge en un point de ce domaine, elle converge uniformément dans tout le domaine vers une fonction harmonique.*

Nous allons étendre ce théorème aux fonctions polyharmoniques.

Une fonction $u(\mathrm{M})$, harmonique d'ordre p dans un domaine D, sera appelée *complètement sousharmonique* dans D, si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Elle est constamment négative ou nulle dans D;

2° Elle est sousharmonique de tous les ordres $<p$.

Ces deux conditions peuvent s'exprimer analytiquement par les p relations

$$(21) \qquad (-1)^i \Delta^i u(\mathrm{M}) \leq 0 \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1), \qquad (\Delta^0 u = u).$$

Si les inégalités suivantes sont vérifiées dans D

$$(22) \qquad (-1)^i \Delta^i u(\mathrm{M}) \geq 0 \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1),$$

la fonction sera dite *complètement surharmonique* dans D.

Si la fonction $u(\mathrm{M})$, harmonique d'ordre p, est complètement sous-

harmonique, la fonction $-u(M)$ est complètement surharmonique: les fonctions

$$\Delta u(M), \quad \Delta^2 u(M), \quad \ldots, \quad \Delta^{p-1} u(M)$$

seront alternativement complètement surharmoniques et complètement sousharmoniques.

Soit

$$u_p(M) = r^{2p-2} u_1^1(M) + r^{2p-4} u_1^2(M) + \ldots + r^2 u_1^{p-1}(M) + u_1^p(M) \quad (r = \overline{M_0 M})$$

le développement d'Almansi d'une fonction harmonique d'ordre p régulière dans le domaine étoilé D_0 de centre M_0. Posons encore

$$\begin{aligned}
u_{p-1}(M) &= r^{2p-4} u_1^1(M) + r^{2p-6} u_1^2(M) + \ldots + u_1^{p-1}(M), \\
u_{p-2}(M) &= r^{2p-6} u_1^1(M) + r^{2p-8} u_1^2(M) + \ldots + u_1^{p-1}(M), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_2 \quad (M) &= r^2 u_1^1(M) + u_1^2(M).
\end{aligned}$$

Alors :

THÉORÈME V. — *Si la fonction $u_p(M)$ est complètement sousharmonique, les fonctions*

$$u_{p-1}(M), \quad u_{p-2}(M), \quad \ldots, \quad u_2(M)$$

seront alternativement complètement surhamoniques et complètement sousharmoniques. De plus les fonctions

$$u_1^p(M), \quad u_1^{p-1}(M), \quad \ldots, \quad u_1^1(M)$$

seront, dans D_0, alternativement négatives et positives.

On a

$$u_p(M) \equiv r^2 u_{p-1}(M) + u_1^p(M). \tag{23}$$

Appliquons à cette identité l'opérateur $\Delta^i (i < p)$. On obtiendra

$$\Delta^i u_p(M) = r^2 \Delta^i u_{p-1}(M) + A_i r \frac{\partial \Delta^{i-1} u_{p-1}}{\partial r} + B_i \Delta^{i-2} u_{p-1};$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Delta^{i-1} u_{p-1}(M) = \quad & \frac{1}{A_i r^{k_i}} \int_0^r r^{k_i - 1} \Delta^i u_p \, dr \\
& - \frac{1}{A_i r^{k_i}} \int_0^r r^{k_i + 1} \Delta^i u_{p-1} \, dr \qquad (i < p - 1)
\end{aligned} \tag{24}$$

et

$$\Delta^{p-2}u_{p-1}(M) = \frac{1}{A_{p-1}r^{k_{p-1}}}\int_0^r r^{k_{p-1}-1}\Delta^{p-1}u_p\,dr. \tag{25}$$

La dernière relation montre que $\Delta^{p-2}u_{p-1}$ a, dans D_0, le signe de $\Delta^{p-1}u_p$, qui est celui de $(-1)^{p-2}$. Supposons alors, d'une manière générale, que $\Delta^i u_{p-1}$ ait, dans D_0, le signe de $(-1)^i$, la formule (24) montre alors que $\Delta^{i-1}u_{p-1}$ a le signe $(-1)^{i-1}$, puisque $\Delta^i u_p(M)$ a, par hypothèse, le signe de $(-1)^{i-1}$. Il en résulte finalement que l'on aura

$$(-1)^i\Delta^i u_{p-1}(M) \geq 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-2);$$

donc la fonction u_{p-1} qui est harmonique d'ordre $p-1$, sera complètement surharmonique. Même démonstration pour les fonctions $u_{p-2}, \ldots, u_2$.

Pour prouver le second point, on n'a qu'à écrire l'identité suivante

$$u_1^p(M) = u_p(M) - r^2 u_{p-1}(M),$$

pour remarquer tout de suite que $u_1^p(M)$ est négative dans D_0. De même, on aura

$$u_1^{p-1}(M) = u_{p-1}(M) - r^2 u_{p-2}(M),$$

ce qui montre, d'après le premier point de la démonstration, que la fonction $u_1^{p-1}(M)$ est positive dans D_0; et ainsi de suite.

La réciproque de ce théorème n'est pas exacte. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le cas des fonctions harmoniques d'ordre 2.

Nous pouvons maintenant donner l'extension annoncée du théorème de Harnack :

THÉORÈME VI. — *Soit*

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad \ldots, \quad M_p$$

une suite de p points situés dans un domaine borné quelconque D, *et tels que le plus grand domaine étoilé compris dans* D *et centré en chacun de ces points contienne tous les points suivants. Soit encore*

$$u_p^1(M) + u_p^2(M) + \ldots + u_p^s(M) + \ldots$$

une série de fonctions polyharmoniques, du même ordre p, complètement

sousharmoniques dans D. *Si cette série converge aux p points précédents, elle convergera uniformément dans l'intérieur de* D ([17]).

Supposons le théorème vrai pour les fonctions harmoniques d'ordre $p-1$, nous allons montrer qu'il est vrai pour les fonctions harmoniques d'ordre p.

En posant $\overline{M_0M} = r$, nous aurons, pour un terme quelconque $u_p^s(M)$ de la série donnée, le développement suivant :

$$u_p^s(M) = r^{2p-2}u_1^{s,1}(M) + r^{2p-4}u_1^{s,2}(M) + \ldots + r^2 u_1^{s,p-1}(M) + u_1^{s,p}(M),$$

ou bien

$$u_p^s(M) = r^2 u_{p-1}^s(M) + u_1^{s,p}(M) \tag{26}$$

avec

$$u_{p-1}^s(M) = r^{2p-4}u_1^{s,1}(M) + r^{2p-6}u_1^{s,2}(M) + \ldots + u_1^{s,p-1}(M),$$

ce développement étant valable dans la plus grande étoile D_1 de centre M_1, contenue dans D. D'après le théorème précédent la fonction $u_{p-1}^s(M)$, harmonique d'ordre $p-1$, est complètement surharmonique dans D_1, et la fonction $u_1^{s,p}(M)$ a un signe constant dans D_1, savoir le signe —.

De la relation précédente on tire

$$u_p^s(M_1) = u_2^{s,p}(M_1),$$

ce qui montre que la série de fonctions harmoniques

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_1^{s,p}(M)$$

converge au point $M = M_1$. Cette série convergera donc uniformément dans tout D. Elle convergera, en particulier, aux points

$$M_2, \quad M_3, \quad \ldots, \quad M_p$$

qui sont contenus, d'après l'hypothèse, dans D_1. Alors la formule (26) montre tout de suite que la série de fonctions harmoniques d'ordre $p-1$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{p-1}^s(M)$$

([17]) D'après une locution due à M. Paul Montel, l'expression *dans l'intérieur* d'un domaine D veut dire : dans tout domaine fermé compris dans D.

converge aux $p-1$ points précédents, et comme ces points satisfont à la condition de l'énoncé, la série convergera uniformément dans l'intérieur de D_1. Donc la série donnée, somme de deux séries uniformément convergentes dans l'intérieur de D_1, sera uniformément convergente dans l'intérieur de D_1.

Remarquons que la condition de l'énoncé, relative aux p points M_1, M_2, ..., M_p, est certainement remplie si ces points sont contenus dans un domaine *convexe* intérieur à D. Soit alors D′ un domaine quelconque complètement intérieur à D, ainsi que sa frontière. Montrons que la série donnée converge uniformément dans D′ fermé.

Si 2ρ est la distance à D′ de la frontière de D, on pourra couvrir tout le domaine D′ avec un nombre *fini* d'hypersphères S, de rayon ρ. L'ensemble de ces hypersphères débordera sûrement le domaine D′, mais on est assuré, par le choix de ρ, que l'on restera dans l'intérieur de D. Si l'on pouvait démontrer la convergence uniforme de la série donnée dans chaque hypersphère S, la convergence uniforme dans D′ fermé en résulterait immédiatement. Or, les hypersphères S se divisent en trois catégories, dont une ou deux peuvent être vides : 1° les hypersphères S_1 contenues dans D_1 ; 2° les hypersphères S_2 ayant une portion commune avec D_1 ; 3° les hypersphères ne rentrant pas dans l'une des catégories précédentes.

Pour la première catégorie la convergence uniforme est démontrée. Si S_2 est une hypersphère de la seconde catégorie, et

$$N_1, \quad N_2, \quad \ldots, \quad N_p,$$

p points quelconques de la portion commune avec une hypersphère de la première catégorie, la convergence de la série donnée en ces points entraînera sa convergence uniforme dans toute l'hypersphère S_2, d'après la remarque de tout à l'heure.

On peut, d'ailleurs affirmer, d'une façon générale, que la convergence de la série donnée dans une portion convexe d'un domaine convexe assure sa convergence uniforme dans tout le domaine. Soit alors S_3 une hypersphère de la troisième catégorie. Il existe une chaîne d'hypersphères reliant cette hypersphère à une hypersphère de la première ou seconde catégorie, telle que deux hypersphères consécutives aient une portion commune. La série étant convergente dans la

première hypersphère de cette chaîne, elle convergera, d'après la remarque que l'on vient de faire, uniformément dans S_3.

La série donnée converge donc uniformément dans D'.

SECONDE PARTIE.

FONCTIONS HARMONIQUES BORNÉES DANS UN DEMI-ESPACE.

I. — Fonctions harmoniques d'ordre 1.

12. Soit $V_r(M)$ une hypersphère de centre M et de rayon r, $S_r(M)$ sa frontière. On désignera par $v_n(r)$ sa mesure, par $\sigma_n(r)$ la mesure de sa frontière. Le théorème de moyenne de Gauss, appliqué à une fonction $u(M)$ harmonique donne

$$u(M) = \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{S_r(M)} u(M')\, d\sigma(M'), \tag{27}$$

M' étant un point de $S_r(M)$, $d\sigma(M')$ un élément de frontière comprenant le point M'. On en déduira, par un calcul dû à M. J. Hadamard ([18]),

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x_i} = \frac{r^{n-1}}{v_n(r)} \int_{S_1(M)} u(x + r\alpha)\alpha_i\, d\omega \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

où j'ai écrit $u(x + r\alpha)$ pour $u(x + r\alpha_1,\ x + r\alpha_2,\ \ldots,\ x + r\alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant les cosinus directeurs du vecteur $\overline{MM'}$, $d\omega$ l'élément angulaire solide de l'espace à n dimensions.

Supposons la fonction $u(M)$ définie dans un domaine D où elle est régulière et bornée par le nombre L_D. On déduira de la formule précédente

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial x_i}\right| < \frac{n}{r} L_D \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or r est arbitraire, sous la condition que l'hypersphère $V_r(M)$ reste

([18]) J. HADAMARD, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique* (*The Princeton University Bulletin*, t. XIII, n° 4, avril 1902, p. 49-52). Dans les Mémoires antérieurs j'avais attribué cette formule à E.-E. Levi.

comprise dans D. On aura donc finalement, en désignant par $\delta_D(M)$ la distance du point M à la frontière de D,

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial x_i}\right| < \frac{n}{\delta_D(M)} L_D \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{29}$$

Il est essentiel de remarquer que la formule est valable quel que soit le domaine D, borné ou non, à condition que la fonction u y reste bornée. On en conclut que l'on peut énoncer, pour de tels domaines, des théorèmes que M. Paul Montel a énoncés pour des domaines bornés (19) :

THÉORÈME VII. — *Des fonctions harmoniques également bornées dans un domaine non borné quelconque, sont également continues dans l'intérieur de ce domaine.*

THÉORÈME VIII. — *Toute famille de fonctions harmoniques, également bornées dans un domaine non borné quelconque, est normale dans l'intérieur de ce domaine; la famille formée par des dérivées partielles de même nom, d'ordre arbitraire, y est aussi normale.*

En particulier, ces théorèmes seront valables dans une *bande*, c'est-à-dire la portion d'espace comprise entre deux hyperplans parallèles, ou encore dans un *demi-espace*.

13. Appelons *hypercercle* toute intersection d'une hypersphère avec un hyperplan. Appelons aussi *valeur moyenne* d'une fonction $u(M)$ d'un point M de l'espace *sur un hyperplan*, la limite, si elle existe, de la valeur moyenne de $u(M)$ dans un hypercercle de l'hyperplan considéré, lorsque le rayon de l'hypercercle augmente indéfiniment. Il est évident que cette limite est indépendante du centre de l'hypercercle.

Avec ces définitions on peut énoncer la proposition suivante, que M. Favard appelle « théorème des valeurs moyennes » (20) :

Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction harmonique, régulière et bornée

(19) PAUL MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Thèse* et *Annales de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. XXIV, 1907).

(20) J. FAVARD, *loc. cit.* (1). L'auteur énonce son théorème pour $n = 2$ et $n = 3$, mais il est bien évident que le théorème est vrai pour toute valeur de n.

dans la bande

$$a \leq x_1 \leq b.$$

1° *Si la fonction* $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ *a une valeur moyenne sur un hyperplan de la bande, elle en aura une sur tout hyperplan de la bande, et cette valeur moyenne est une constante ;*

2° *Si* $u(M)$ *a aussi une valeur moyenne sur un hyperplan de la bande, elle en aura une sur tout autre hyperplan intérieur, et cette valeur moyenne sera une fonction linéaire de* x_1

$$kx_1 + l.$$

Une fonction harmonique, bornée dans un demi-espace l'est forcément dans une bande contenue dans ce demi-espace. Par conséquent, le théorème de M. Favard lui est applicable. Nous allons cependant montrer que l'on peut remplacer ce résultat par un autre plus précis. Nous utiliserons ensuite le théorème de M. Favard pour donner un autre théorème des valeurs moyennes, dans lequel on ne fera aucune hypothèse sur la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

14. Pour le premier point, il suffira de partir de la formule (29). Soit $u(M) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction harmonique, régulière dans le demi-espace $x_1 \geq a$, où elle est bornée par le nombre L. La formule (29) donnera, conformément aux remarques faites au paragraphe précédent,

$$\left| \frac{\partial u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} \right| < \frac{nL}{x_1 - a}. \tag{30}$$

Supposons que la valeur moyenne de $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ sur l'hyperplan $x_1 = \xi_1$ existe. Alors cette valeur moyenne existera, en vertu du théorème rappelé plus haut, sur tout hyperplan $x_1 = \xi'_1$, tel que $\xi'_1 > \xi_1$.

Or si l'on désigne par $\mu[u; \xi'_1]$ la valeur moyenne de u sur l'hyperplan $x_1 = \xi'_1$, on a, d'après l'inégalité (30),

$$|\mu[u; \xi'_1]| < \frac{nL}{\xi'_1 - a}$$

et, d'après le théorème de M. Favard,

$$\mu[u;\xi_1'] = \mu[u;\xi_1] = k.$$

Prenons ξ_1' tel que l'on ait

$$\frac{nL}{\xi_1' - a} < k.$$

Il en résulterait

$$|\mu[u;\xi_1']| < k.$$

Il y a donc contradiction tant que $k \neq 0$. On peut par conséquent énoncer le théorème suivant, qu'on pourrait appeler « théorème des valeurs moyennes dans un demi-espace » :

THÉORÈME IX. — *Si la dérivée* $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ *d'une fonction u harmonique, bornée dans le demi-espace* $x_1 \geq a$, *a une valeur moyenne sur un hyperplan intérieur à la bande, elle en aura une sur tout autre hyperplan intérieur, et cette valeur moyenne sera nulle.*

Si, de plus, la fonction u possède une valeur moyenne sur un hyperplan intérieur, elle en possédera une sur tout autre hyperplan intérieur, et cette valeur moyenne sera constante.

15. Mais ce théorème, comme d'ailleurs le théorème de M. Favard, part d'une hypothèse relative à la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, pour en déduire un résultat pour la fonction u. Nous allons le remplacer par un théorème où intervient, seule, la fonction u.

Voici, tout d'abord, le théorème pour une bande :

THÉORÈME X. — *Si la fonction* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *bornée dans la bande* $a \leq x_1 \leq b$ *a une valeur moyenne sur* deux *hyperplans intérieurs* $x_1 = \xi_1$, $x_1 = \xi_1'$, *elle en aura une sur tout hyperplan intérieur* $x_1 = t$, *et cette valeur moyenne sera une fonction linéaire de t, soit*

$$\mu[u;t] = kt + l. \tag{31}$$

De plus, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ *aura une valeur moyenne sur tout hyperplan*

intérieur, et cette valeur moyenne sera une constante, soit

$$\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}; t\right] = k. \tag{32}$$

Démonstration. — Supposons que l'on ait démontré le théorème pour la bande $\xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_1'$. Alors la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, possédant une valeur moyenne sur un hyperplan, d'ailleurs quelconque, de cette bande, elle en possédera une sur tout hyperplan de la bande $a \leqq x_1 \leqq b$, en vertu du théorème de M. Favard. Et, comme la fonction u admet une valeur moyenne, sur l'hyperplan $x_1 = \xi_1$ par exemple, elle en admettra une en vertu du même théorème, sur tout hyperplan intérieur à la bande $a \leqq x_1 \leqq b$. Il reste donc à démontrer le théorème pour la bande $\xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_1'$, le théorème de M. Favard pouvant servir, comme nous venons de le voir, à le *prolonger dans toute la bande initiale.* Soit donc

$$\xi_1 < t < \xi_1'.$$

Une parallèle quelconque à l'axe des x_1 percera les hyperplans $x_1 = \xi_1$, $x_1 = \xi_1'$ aux points O et O'. Considérons un hypercylindre circulaire de rayon r et d'axe OO', coupé par les hyperplans considérés suivant les hypercercles C et C'. Appelons, respectivement, K la portion de la surface de l'hypercylindre comprise entre les hyperplans $x_1 = \xi_1$, $x_1 = t - \varepsilon$ et K' la portion comprise entre les hyperplans $x_1 = t + \varepsilon$, $x_1 = \xi_1'$. Appelons aussi Γ et Γ' les hypercercles suivant lesquels l'hypercylindre est coupé par les hyperplans $x_1 = t - \varepsilon$ et $x_1 = t + \varepsilon$. Dans le domaine limité par C, K et Γ, appliquons la formule de Green à la fonction $u(M)$ et à la fonction de Green $G(x_1; t)$ relative au segment OO' et au point $x_1 = t$, définie, comme il est bien connu, par les relations

$$G(x_1; t) = \begin{cases} \dfrac{(x_1 - \xi_1)(t - \xi_1')}{\xi_1' - \xi_1}, & \text{si } x_1 \leqq t, \\ \dfrac{(x_1 - \xi_1')(t - \xi_1)}{\xi_1' - \xi_1}, & \text{si } x_1 > t. \end{cases} \tag{33}$$

On aura

$$\int_C \left(u\frac{\partial G}{\partial x_1} - G\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\sigma + \int_K \left(u\frac{dG}{d\nu} - G\frac{du}{d\nu}\right)d\sigma - \int_\Gamma \left(u\frac{\partial G}{\partial x_1} - G\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\sigma = 0.$$

Or, G ne dépend pas de $x_2, x_3, \ldots, x_n$. De plus, G est nulle en O, donc dans tout C; par conséquent, la formule précédente devient

$$(34)\qquad \int_C u\frac{\partial G}{\partial x_1}\,d\sigma - \int_K G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma - \int_\Gamma\left(u\frac{\partial G}{\partial x_1} - G\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\sigma = 0.$$

Appliquons, de même, la formule de Green à la portion comprise entre K′, Γ′, C′. On aura, par suite de remarques analogues aux précédentes,

$$(35)\qquad -\int_{C'} u\frac{\partial G}{\partial x_1}\,d\sigma + \int_{K'} G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma + \int_{\Gamma'}\left(u\frac{\partial G}{\partial x_1} - G\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\sigma = 0.$$

De (33) on tire

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \begin{cases} \dfrac{t-\xi_1'}{\xi_1'-\xi_1}, & \text{si } x_1 \leqq t, \\ \dfrac{t-\xi_1}{\xi_1'-\xi_1}, & \text{si } x_1 \geqq t. \end{cases}$$

On en déduit

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}(t+\varepsilon;t) - \frac{\partial G}{\partial x_1}(t-\varepsilon;t) = 1,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. Cela étant, ajoutons les relations (34) et (35) et faisons ensuite tendre ε vers zéro. On obtiendra

$$(36)\qquad \frac{t-\xi_1'}{\xi_1'-\xi_1}\int_C u\,d\sigma - \frac{t-\xi_1}{\xi_1'-\xi_1}\int_{C'} u\,d\sigma - \int_{K_0} G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma + \int_{K_0'} G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma + \int_{\Gamma_0} u\,d\sigma = 0,$$

K_0, K_0', Γ_0 étant les limites de K, K′, Γ pour $\varepsilon = 0$. Or, l'inégalité (33) donne

$$\left|\frac{du}{d\nu}\right| < \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{x_1-a}L, & \text{si } x_1 \leqq \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{n(n-1)}{b-x}L, & \text{si } x_1 \geqq \dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

On en déduira

$$(37)\qquad \left|\int_{K_0} G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma\right| + \left|\int_{K_0'} G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma\right| < n(n-1)(b-a)Lc'_{n-1}(r)\int_{\xi_1}^{\xi_1'}\frac{G\,dx_1}{(x_1-a)(b-x_1)},$$

où $c_{n-1}(r)$ représente la mesure d'un hypercercle de rayon r (égale à la mesure d'une hypersphère de même rayon, de l'espace euclidien

à $n-1$ dimensions), et

$$\omega'_{n-1}(r)=\frac{d\omega_{n-1}(r)}{dr}$$

la mesure de sa périphérie.

Cela étant, dans la formule (36) divisons partout par $\omega_{n-1}(r)$ et faisons augmenter r indéfiniment. On aura, par hypothèse,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(r)}\int_{C}u\,d\sigma=A,\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(r)}\int_{C'}u\,d\sigma=B\qquad (A,B<\infty),$$

et, d'autre part, l'inégalité (37) montre que les intégrales

$$\frac{1}{\omega_{n-1}(r)}\int_{K_0}G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma,\qquad \frac{1}{\omega_{n-1}(r)}\int_{K'_0}G\frac{du}{d\nu}\,d\sigma$$

tendent vers zéro. Il viendra donc, finalement,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(r)}\int_{\Gamma_0}u\,d\sigma\equiv\mu[u;t]=-\frac{t-\xi'_1}{\xi'_1-\xi_1}A+\frac{t-\xi_1}{\xi'_1-\xi_1}B=kt+l,$$

et la première partie du théorème est démontrée. On en déduira

$$\frac{\partial\mu[u;t]}{\partial t}=k;$$

mais les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$ et μ sont ici permutables ([21]); donc

$$\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x_1};t\right]_{x_1=t}=k,$$

ce qui démontre aussi la seconde partie du théorème.

On en déduit aisément le théorème correspondant pour le demi-espace :

THÉORÈME XI. — *Si la fonction harmonique $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ bornée dans le demi-espace $x_1\geqq a$, a une valeur moyenne sur* deux *hyperplans quelconques, intérieurs au demi-espace, ces deux valeurs moyennes sont égales. La fonction u possédera, de plus, une valeur moyenne* constante *sur tout hyperplan intérieur au demi-espace, et la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ possédera une valeur moyenne* nulle *sur tout hyperplan intérieur.*

([21]) J. FAVARD, *loc. cit.* ([4]), p. 11.

II. — Fonctions harmoniques d'ordre p.

16. Nous établirons, tout d'abord, une inégalité analogue à l'inégalité ([22]). Partons, pour cela, de la formule (20). En multipliant les deux membres de cette formule par r^{n-1} et intégrant entre 0 et r, on obtiendra

$$u(\mathrm{M}) = \mathrm{C}_0\mu_1 + \mathrm{C}_1\mu_2 + \ldots + \mathrm{C}_{p-1}\mu_p.$$

L'expression de l'une quelconque $\mu_s[u; \mathrm{M}; r]$ des moyennes sera, en vertu de (11),

$$\mu_s[u; \mathrm{M}; r] = \frac{n^{s-1}}{c_n \cdot r^n} \int_0^r \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} \frac{dr_2}{r_2} \ldots \int_0^{r_{s-2}} \frac{dr_{s-2}}{r_{s-2}} \int_{\mathrm{V}r_{s-1}(\mathrm{M})} u\, d\mathfrak{V},$$

$d\mathfrak{V}$ étant l'élément de volume et $c_n = c_n(1)$. On en déduira, par la formule de dérivation de M. Hadamard,

$$\frac{\partial \mu_s}{\partial x_i} = \frac{n^{s-1}}{c_n \cdot r^n} \int_0^r \frac{dr_1}{r_1} \int_0^{r_1} \frac{dr^2}{r_2} \ldots \int_0^{r_{s-2}} r_{s-1}^{n-2}\, dr_{s-1} \int_{\mathrm{S}_1(\mathrm{M})} u\, \alpha_i\, d\omega,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant les cosinus directeurs du rayon de l'hypersphère-unité $\mathrm{V}_1(\mathrm{M})$, aboutissant à l'élément $d\omega$. Si donc on désigne par L_D la borne supérieure de $|u(\mathrm{M})|$ dans le domaine D, on aura

$$\left|\frac{\partial \mu_s}{\partial x_i}\right| < \left(\frac{n}{n-1}\right)^s \frac{\sigma_n}{c_n} \frac{\mathrm{L}_\mathrm{D}}{r} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

où $\sigma_n = \sigma_n(1)$. En posant

$$\mathrm{K}_n^p = \frac{\sigma_n}{c_n}\left[|\mathrm{C}_0| + \frac{n}{n-1}|\mathrm{C}_1| + \ldots + \frac{n^{p-1}}{(n-1)^{p-1}}|\mathrm{C}_{p-1}|\right],$$

on aura donc, quel que soit i,

$$\left|\frac{\partial u(\mathrm{M})}{\partial x_i}\right| < \frac{\mathrm{K}_n^p}{r}\mathrm{L}_\mathrm{D} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

d'où, comme plus haut ([22]),

$$\boxed{\left|\frac{\partial u(\mathrm{M})}{\partial x_i}\right| < \frac{\mathrm{K}_n^p}{\delta_\mathrm{D}(\mathrm{M})}\mathrm{L}_\mathrm{D}.} \tag{38}$$

([22]) L'expression de la constante K_n^p du Mémoire cité ([2]) *b*, doit être remplacée par l'expression trouvée ici. De même, l'exposant $n-1$ de $\delta_\mathrm{D}(\mathrm{M})$ doit être supprimé.

Les remarques faites au n° 12 s'appliquent ici sans aucune modification. La formule (38) est valable quel que soit le domaine D, borné ou non; elle sera, en particulier, valable dans une bande où u est bornée, ou encore dans un demi-espace, si u y est bornée. On en déduit tout de suite que l'on pourra énoncer pour de tels domaines des théorèmes analogues aux théorèmes VII et VIII :

THÉORÈME XII. — *Des fonctions harmoniques d'odre p, également bornées dans un domaine non borné quelconque, sont également continues dans l'intérieur de ce domaine, et les dérivées d'un même ordre, arbitraire, y sont aussi également continues.*

THÉORÈME XIII. — *Soit*

$$u_1(\mathrm{M}), \quad u_2(\mathrm{M}), \quad \ldots, \quad u_\nu(\mathrm{M})$$

une suite de fonctions harmoniques d'ordre p, également bornées dans un domaine non borné quelconque. Si cette suite y converge, elle convergera uniformément dans l'intérieur du domaine vers une fonction $u(\mathrm{M})$, *harmonique d'ordre p. De plus, toute dérivée partielle de* $u_\nu(\mathrm{M})$ *convergera uniformément vers la dérivée de même nom de* $u(\mathrm{M})$.

Des théorèmes correspondants pour les domaines bornés ont été donnés dans notre Mémoire cité (²) *b* (théorèmes III et IV).

17. Si dans la formule (38) on suppose que le domaine D augmente indéfiniment dans tous les sens et que le nombre L_D reste borné, on obtient l'extension suivante du théorème de Liouville :

Une fonction harmonique d'ordre p, bornée dans tout l'espace, est une constante.

Une question tout analogue à celle que nous avons posée pour les fonctions harmoniques ordinaires se pose alors pour les fonctions harmoniques d'ordre p : que peut-on dire d'une fonction harmonique d'ordre p, bornée dans un demi-espace?

Nous allons, premièrement, résoudre la question pour une bande, à l'exemple de M. Favard, en énonçant une extension du théorème des valeurs moyennes aux fonctions harmoniques d'ordre p :

THÉORÈME XIV. — *Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction harmonique d'ordre p, régulière et bornée dans la bande $a \leqq x_1 \leqq b$.*

1° *Si les fonctions suivantes*

$$(39) \qquad \frac{\partial \Delta^{p-1} u}{\partial x_1}, \quad \Delta^{p-1} u, \quad \frac{\partial \Delta^{p-2} u}{\partial x_1}, \quad \Delta^{p-2} u, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Delta^{p-q} u}{\partial x_1},$$

où $q \leqq p$, admettent, chacune, une valeur moyenne sur un hyperplan de la bande, elles admettront une moyenne sur tout hyperplan intérieur. Ces valeurs moyennes seront des polynomes en x_1 de degrés respectifs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (2q-2);$$

2° *Si $\Delta^{p-q} u$ a aussi une valeur moyenne sur un hyperplan intérieur, elle en aura une sur tout autre hyperplan et cette valeur moyenne est un polynome de degré $2q-1$ en x_1.*

Le théorème est vrai pour $q = 1$; c'est le théorème de M. Favard ; car $\Delta^{p-1} u$ est harmonique d'ordre 1. Il reste donc à le montrer pour $q > 1$ quelconque, en le supposant vrai pour $q - 1$.

Rappelons, tout d'abord, cette extension de la formule de Green donnée, pour $m = 2$ par É. Mathieu ([23]), et pour m quelconque par A. Gutzmer ([24])

$$(40) \qquad \int_D (U \Delta^m V - V \Delta^m U)\, d\mathfrak{D} = \sum_{\lambda=0}^{m-1} \int_F \left(\Delta^\lambda V \frac{d\Delta^{m-\lambda-1} U}{d\nu} - \Delta^\lambda U \frac{d\Delta^{m-\lambda-1} V}{d\nu} \right) d\sigma.$$

D est un domaine de l'espace à n dimensions, de frontière F.

Appliquons cette formule, avec $m = q$, aux fonctions suivantes :

$$U = \Delta^{p-q} u, \qquad V = \frac{x_1^{2q-2}}{(2q-2)!},$$

harmoniques d'ordre q. Cela donnera

$$\Delta^s V = \frac{x_1^{2q-2s-2}}{(2q-2s-2)!}, \qquad \Delta^{q-1} V = 1,$$

([23]) É. MATHIEU, *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 2e série, t. XIV, 1869, p. 378-421).

([24]) A. GUTZMER, *Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur* (*ibid.*, 4e série, t. VI, 1890, p. 405-422).

et la formule (40) deviendra

$$(40') \qquad \sum_{\lambda=0}^{q-1} \int_F \left(\Delta^\lambda V \frac{d\Delta^{q-\lambda-1} U}{d\nu} - \Delta^\lambda U \frac{d\Delta^{q-\lambda-1} V}{d\nu} \right) d\sigma = 0.$$

Soit $x_1 = \xi_0$ l'hyperplan sur lequel on sait que les moyennes de la suite (39), qui s'écrit maintenant

$$(39') \qquad \frac{\partial \Delta^{q-1} U}{\partial x_1}, \quad \Delta^{q-1} U, \quad \frac{\partial \Delta^{q-2} U}{\partial x_1}, \quad \Delta^{q-2} U, \quad \ldots, \quad \Delta U, \quad \frac{\partial U}{\partial x_1},$$

existent, et $x_1 = \xi$ un autre hyperplan, arbitraire, de la bande considérée. Je prends pour domaine D une portion d'hypercylindre circulaire, de rayon r quelconque, dont l'axe coïncide avec l'axe des x_1, cette portion étant limitée par les deux hyperplans considérés. Je désignerai, respectivement, par C_0, C les hypercercles, sections de cet hypercylindre avec les hyperplans $x_1 = \xi_0$, $x_1 = \xi$ et par K la portion *latérale* de la frontière de cet hypercylindre.

Cela étant, appliquons la formule (40') au domaine ainsi construit. On aura

$$\sum_{\lambda=0}^{q-1} \frac{\xi_0^{2q-2\lambda-2}}{(2q-2\lambda-2)!} \int_{C_0} \frac{\partial \Delta^{q-\lambda-1} U}{\partial x_1} d\sigma - \sum_{\lambda=1}^{q-1} \frac{\xi_0^{2\lambda-1}}{(2\lambda-1)!} \int_{C_0} \Delta^\lambda U \, d\sigma,$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{q-2} \frac{\xi^{2q-2\lambda-2}}{(2q-2\lambda-2)!} \int_C \frac{\partial \Delta^{q-\lambda-1} U}{\partial x_1} d\sigma + \sum_{\lambda=1}^{q-1} \frac{\xi^{2\lambda-1}}{(2\lambda-1)!} \int_C \Delta^\lambda U \, d\sigma$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{q-1} \frac{1}{(2q-2\lambda-2)!} \int_K \frac{d\Delta^{q-\lambda-1} U}{d\nu} x_1^{2q-2\lambda-2} \, d\sigma = \int_C \frac{\partial U}{\partial x_1} \partial\sigma.$$

Divisons partout $\sigma_{n-1}(r)$ et faisons tendre r vers l'infini. Dans le premier membre, les intégrales étendues à K portent sur des fonctions bornées ; elles tendent vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Les autres intégrales tendent, par hypothèse, vers des limites finies ; car, le théorème est vrai pour $q-1$ et les fonctions de la suite (39'), sauf la dernière, ont une moyenne sur tout hyperplan de la bande. Par hypothèse aussi, $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ a une valeur moyenne sur l'hyperplan $x_1 = \xi_0$. Donc

$$\mu \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} ; \xi \right]$$

existe et il est facile de constater que c'est un polynome de degré $2q-2$ en ξ; car, dans le premier membre, après le passage à la limite, les termes du plus haut degré sont

$$\frac{\xi^{2q-2\lambda-2}}{(2q-2\lambda-2)!}\mu\left[\frac{\partial\Delta^{q-\lambda-1}U}{\partial x_1};\xi\right], \qquad \frac{\xi^{2\lambda-1}}{(2\lambda-1)!}\mu[\Delta^\lambda U;\xi]$$
$$(\lambda=0,1,\ldots,q-2), \qquad (\lambda=1,2,\ldots,q-1);$$

ils sont tous de degré $2q-2$.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, nous prendrons, dans la formule (40),

$$U=\Delta^{p-q}u, \qquad V=\frac{x_1^{2q-1}}{(2q-1)!}.$$

Ces fonctions sont encore harmoniques d'ordre q et l'on aura

$$\Delta^s V=\frac{x_1^{2q-2s-1}}{(2q-2s-1)!}, \qquad \Delta^{q-1}V=x_1.$$

En appliquant la formule (40) à ces deux fonctions et au domaine hypercylindrique considéré, on obtiendra

$$-\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{\xi_0^{2q-2\lambda-1}}{(2q-2\lambda-1)!}\int_{C_0}\frac{\partial\Delta^{q-\lambda-1}U}{\partial x_1}\,d\sigma+\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{\xi_0^{2\lambda}}{(2\lambda)!}\int_{C^0}\Delta^\lambda U\,d\sigma$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{\xi^{2q-2\lambda-1}}{(2q-2\lambda-1)!}\int_{C}\frac{\partial\Delta^{q-\lambda-1}U}{\partial x_1}\,d\sigma-\sum_{\lambda=1}^{q-1}\frac{\xi^{2\lambda}}{(2\lambda)!}\int_{C}\Delta^\lambda U\,d\sigma$$
$$-\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{1}{(2q-2\lambda-1)!}\int_{K}\frac{d\Delta^{q-\lambda-1}U}{d\nu}\,x_1^{2q-2\lambda-1}\,d\sigma=\int_{C}U\,d\sigma;$$

d'où, en divisant partout par $\sigma_{n-1}(r)$ et faisant augmenter le rayon r indéfiniment, on trouvera que $\mu[U;\xi]$ existe et est donnée par la formule

$$\mu[U;\xi]=-\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{\xi_0^{2q-2\lambda-1}}{(2q-2\lambda-1)!}\mu\left[\frac{\partial\Delta^{q-\lambda-1}U}{\partial x_1};\xi_0\right]+\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{\xi_0^{2\lambda}}{(2\lambda)!}\mu[\Delta^\lambda U;\xi_0]$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{q-1}\frac{\xi^{2q-2\lambda-1}}{(2q-2\lambda-1)!}\mu\left[\frac{\partial\Delta^{q-\lambda-1}U}{\partial x_1};\xi\right]-\sum_{\lambda=1}^{q-1}\frac{\xi^{2\lambda}}{(2\lambda)!}\mu[\Delta^\lambda U;\xi].$$

Le degré de $\mu\left[\frac{\partial\Delta^{q-\lambda-1}U}{\partial x_1};\xi\right]$ est, par hypothèse, 2λ; donc le troisième

terme du second membre est un polynome de degré $2q-1$ en ξ. Le degré de $\mu[\Delta^\lambda U;\xi]$ en ξ est, par hypothèse, $2(q-\lambda)-1$. Donc le dernier terme est un polynome de degré $2q-1$ en ξ et il en sera, finalement, de même de $\mu[U;\xi]$.

Le théorème énoncé est démontré.

18. Nous pouvons maintenant donner l'extension aux fonctions harmoniques d'ordre p de notre théorème.

THÉORÈME XV. — *Supposons que la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ harmonique d'ordre p, bornée dans la bande $a \leqq x_1 \leqq b$, ait une valeur moyenne sur* deux *hyperplans intérieurs $x_1 = \xi_1$, $x_1 = \xi'_1$ et qu'il en soit de même de ses laplaciens successifs*

$$\Delta u, \quad \Delta^2 u, \quad \ldots, \quad \Delta^{p-1} u.$$

Alors, la fonction u, ses laplaciens successifs et les dérivées par rapport à x_1 de ces fonctions auront, chacune, une valeur moyenne sur tout hyperplan intérieur $x_1 = t$. La valeur moyenne de la fonction u sera un polynome de degré $2p-1$ en t.

Reprenons les notations et le domaine du théorème X. Posons

$$G^2(x_1;t) = \int_{\xi_1}^{\xi'_1} G(x_1;s)\,G(s;t)\,ds$$

et, d'une façon générale,

$$G^i(x_1;t) = \int_{\xi_1}^{\xi'_1} G(x_1;s)\,G^{i-1}(s;t)\,ds \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

avec $G^1 = G$, $G^i(x_1;t)$ est, d'après M. Volterra, la puissance $i^{\text{ième}}$ *de composition de seconde espèce* de $G(x_1;t)$, relativement à l'intervalle (ξ_1, ξ'_1). Il est évident que G^i est continue dans (ξ_1, ξ'_1), que l'on a

$$\frac{\partial^2 G^i(x_1;t)}{\partial x_1^2} = G^{i-1}(x_1;t),$$

quel que soit i. D'où

$$\frac{\partial^{2i} G^i(x_1;t)}{\partial x_1^{2i}} = 0,$$

sauf pour $x_1 = t$. Enfin, $G^i(\xi_1 ; t) = G^i(\xi_1' ; t) = 0$, quel que soit i ([25]).

Cela étant, nous appliquerons la formule (40) aux fonctions

$$U(M) = u(M), \qquad V(M) = G^p(x_1 ; t)$$

dans le domaine limité par C, K, et Γ. Dans ce domaine la fonction G^p est harmonique d'ordre p; donc la formule (40) donnera

$$\sum_{\lambda=0}^{p=1} \int_C \left(\Delta^\lambda G^p \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} u}{\partial x_1} - \Delta^\lambda u \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} G^p}{\partial x_1} \right) d\sigma$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_K \left(\Delta^\lambda G^p \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} - \Delta^\lambda u \frac{d\Delta^{p-\lambda-1} G^p}{d\nu} \right) d\sigma$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_\Gamma \left(\Delta^\lambda G^p \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} u}{\partial x_1} - \Delta^\lambda u \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} G^p}{\partial x_1} \right) d\sigma = 0.$$

Or, on a

$$\Delta^k G^p = G^{p-k}$$

et, d'autre part, G^i ne dépend pas de $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et il est nul en O, donc dans tout C. On aura, par conséquent,

$$\sum_{\lambda=0}^{p=1} \int_C \Delta^\lambda u \frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} d\sigma - \sum_{\lambda=0}^{p=1} \int_K G^{p-\lambda} \frac{d\Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} d\sigma$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{p=1} \int_\Gamma \left(G^{p-\lambda} \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} u}{\partial x_1} - \Delta^\lambda u \frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} \right) d\sigma = 0.$$

Si l'on applique maintenant la formule (40) à la portion d'espace comprise entre K′, Γ′, C′, on trouvera

$$- \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_{C'} \Delta^\lambda u \frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x^1} d\sigma + \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_{K'} G^{p-\lambda} \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} d\sigma$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_{\Gamma'} \left(G^{p-\lambda} \frac{\partial \Delta^{p-\lambda-1} u}{\partial x_1} - \Delta^\lambda u \frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} \right) d\sigma = 0.$$

Ajoutons les deux relations et faisons tendre ε vers zéro. On obtiendra,

([25]) *Cf.* MIRON NICOLESCO, *Fonctions de Green d'ordre p* (*Buletinul Facultàtii de Stiinte din Cernàuti*, vol. V, 1932, p. 206-211).

en désignant par K_0, K'_0, $\Gamma_0 = \Gamma'_0$ les limites de K, K', Γ, Γ',

$$(41)\quad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} \int_C \Delta^\lambda u \, d\sigma - \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} \int_{C'} \Delta^\lambda u \, d\sigma - \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_{K_0} G^{p-\lambda} \frac{d\Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} \, d\sigma + \sum_{\lambda=0}^{p-1} \int_{K'_0} G^{p-\lambda} \frac{d\Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} \, d\sigma = 0,$$

puisque l'on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\partial G^{\lambda+1}(x_1 + \varepsilon; t)}{\partial x_1} - \frac{\partial G^{\lambda+1}(x_1 - \varepsilon; t)}{\partial x_1} \right]_{x_1 = t} = 0$$

pour toute valeur de λ, sauf pour la valeur $\lambda = 0$, pour laquelle cette limite est égale à l'unité.

D'après la formule (38), si la fonction u, harmonique d'ordre p dans la bande $a \leqq x_1 \leqq b$, y est bornée, ses dérivées partielles du premier ordre seront bornées dans l'intérieur de cette bande. En appliquant la même proposition à ces dérivées, on déduira que tous les laplaciens de u sont bornés dans l'intérieur de la bande précédente (en particulier, ils seront bornés dans la bande $\xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi''_1$). Désignons par $L_{p-\lambda-1}$ la borne de $\Delta^{p-\lambda-1} u$. On aura alors, pour la somme

$$\left| \int_{K_0} G^{p-\lambda} \frac{d\Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} \, d\sigma \right| + \left| \int_{K'_0} G^{p-\lambda} \frac{d\Delta^{p-\lambda-1} u}{d\nu} \, d\sigma \right|,$$

une limitation analogue à la limitation (36); seul L sera remplacé par $L_{p-\lambda-1}$ et G par $G^{p-\lambda}$. Si donc, dans la formule (41), on divise partout par $\varphi_{n-1}(r)$ et que l'on fait augmenter le rayon r indéfiniment, on trouvera, en posant

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\varphi_{n-1}(r)} \int_C \Delta^\lambda u \, d\sigma = A_\lambda, \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\varphi_{n-1}(r)} \int_{C'} \Delta^\lambda u \, d\sigma = B_\lambda$$

(ces limites existant par hypothèse) et en tenant compte de la remarque précédente,

$$(42)\quad \boxed{\lim \frac{1}{\varphi_{n-1}(r)} \int_{\Gamma_0} u \, d\sigma = \mu[u; t] = -\sum_{\lambda=0}^{p-1} \left(\frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} \right)_{x_1 = \xi_1} A_\lambda + \sum_{\lambda=0}^{p-1} \left(\frac{\partial G^{\lambda+1}}{\partial x_1} \right)_{x_1 = \xi'_1} B_\lambda}.$$

Cette formule démontre bien l'existence de $\mu[u; t]$, et en donne l'expression. On voit que c'est un polynome de degré $2p-1$ en t. Pour démontrer l'existence des valeurs moyennes pour les laplaciens successifs et leurs dérivées par rapport à x_1, il suffira simplement de faire encore remarquer que l'on a (21)

$$(43) \qquad \mu\left[\frac{\partial \Delta^i u}{\partial x_1}; t\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\mu[\Delta^i u; t] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Le degré de chacune de ces moyennes par rapport à t en résulte aisément.

L'existence des valeurs moyennes est ainsi démontrée pour l'intervalle $\xi_1 \leqq t \leqq \xi'_1$. Pour *prolonger* le théorème d'existence dans toute la bande $a \leqq t \leqq b$, il suffira d'appliquer le théorème XIV : on vient de voir que les fonctions

$$\frac{\partial \Delta^{p-1} u}{\partial x_1}, \quad \Delta^{p-1} u, \quad \frac{\partial \Delta^{p-2} u}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u$$

admettent, chacune, une valeur moyenne sur l'hyperplan $x_1 = t$ $(a < \xi_1 \leqq t \leqq \xi'_1 < b)$. Donc, en vertu du théorème cité, elles admettront une valeur moyenne sur *tout hyperplan intérieur à la bande* $a \leqq t \leqq b$.

C. Q. F. D.

19. Passons maintenant aux fonctions harmoniques d'ordre p, bornées dans un demi-espace. Nous avons alors la proposition suivante :

THÉORÈME XVI. — *Soit* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une fonction harmonique d'ordre* p, *bornée dans le demi-espace* $a \leqq x_1$. *Si cette fonction, ainsi que ses laplaciens successifs*

$$\Delta u, \quad \Delta^2 u, \quad \ldots, \quad \Delta^{p-1} u$$

admettent une valeur moyenne sur deux *hyperplans intérieurs du demi-espace, alors la fonction* u *admettra une valeur moyenne* constante *sur tout hyperplan intérieur. Ses laplaciens admettront une valeur moyenne* nulle *sur tout hyperplan intérieur.*

En effet, d'après le théorème XV, $\mu[\mu; t]$ existe pour $t > a$, et c'est

un polynome de degré $2p-1$ en t. Mais, d'autre part, on a, si L est la borne de u dans le demi-espace considéré,

$$|\mu[u;t]|<L.$$

Le polynome en t considéré est donc borné, quel que soit $t<a$, c'est donc une *constante*. Pour le reste du théorème, on tiendra compte des relations (43).

Remarquons, pour finir, que le théorème que nous venons d'établir peut se généraliser de la manière suivante :

THÉORÈME XVII. — *La fonction u étant supposée régulière dans le demi-espace considéré, si le rapport*

$$\frac{|u|}{(x_1-a)^q},$$

où $q\leq 2p-1$, *est borné dans l'intérieur de ce demi-espace,* $\mu[u;t]$ *est un polynome en t de degré q.*

Car, si l'on a

$$|u|<L(x_1-a)^q,$$

on aura

$$|\mu[u;t]|<L(t-a)^q;$$

donc le polynome $\mu[u;t]$ de t doit croître au plus comme t^q; c'est par conséquent, un polynome de degré q.

BeatriceGloria_personal library